PREMIERE EPREUVE

Durée : 4 heures

Il est demandé aux candidats de rédiger très soigneusement les démonstrations et de citer avec précision les théorèmes du cours utilisés dans les justifications.

Dans tout le problème, E désigne l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, continues, périodiques de période 2π, muni de la norme de la convergence uniforme :

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| \quad ; \quad x \in \mathbb{R}\}.$$

Les fonctions éléments de E sont uniformément continues sur $\mathbb{R}$ et, si f appartient à E, $\left[\int_a^{a+2\pi} f(t)\,dt\right]$ est indépendant de a décrivant $\mathbb{R}$ (ces propriétés pourront être utilisées sans qu'il soit nécessaire d'en donner la démonstration).

Si f appartient à E, la notation $f \geqslant 0$ signifie :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) \in \mathbb{R}_+$$

($\mathbb{R}_+$ désignant l'ensemble des réels positifs ou nuls).

On notera, pour n élément de $\mathbb{Z}$, e_n l'élément de E défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad e_n(x) = e^{inx}$$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e_0(x)\,dx = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e_n(x)\,dx = 0 \ \text{ si } n \neq 0\right).$$

On appellera suite toute fonction de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$. Pour une telle suite a, on emploiera le symbole $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a(n)$ dans le cas où $\sum_{n=0}^{\infty} a(n)$ et $\sum_{n=1}^{\infty} a(-n)$ sont des séries convergentes, et $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a(n)$ désignera alors le nombre complexe $\sum_{n=0}^{\infty} a(n) + \sum_{n=1}^{\infty} a(-n)$.

Enfin, si f appartient à E, on désignera par $\hat{f}$ la suite :

$$n \in \mathbb{Z} \longmapsto \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e_{-n}(x)\,dx.$$

La partie I *a pour but de faire établir certains résultats nécessaires à la résolution des parties* II *et* III *qui sont indépendantes entre elles.* IV *est conséquence des résultats obtenus en* II *et* III. *Les notations définies dans* I *sont aussi utilisées dans la suite.*

I

A. On pose, pour r réel appartenant à $]0, 1[$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad A_r(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e_n(x).$$

1° Montrer que A_r est bien défini et que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad A_r(x) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos x}.$$

Vérifier que

$$A_r \in E \ , \ A_r \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} A_r(t)\,dt = 1.$$

.../...

2° Si f appartient à E, on pose, pour r appartenant à $]0,1[$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad P_r f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} \hat{f}(n)\, e_n(x).$$

Montrer que $P_r f$ est bien défini, que $P_r f$ appartient à E et que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad P_r f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-s)\, A_r(s)\, ds.$$

3° Déduire des deux questions précédentes que, pour tout élément f de E,

$$\lim_{\substack{r \to 1 \\ r<1}} \| P_r f - f \| = 0.$$

B. Si C est une suite, on dit que C vérifie la propriété (*) si :

$$(*) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n \left[\sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} C(p-q)\, \xi_p \overline{\xi_q} \right] \in \mathbb{R}_+ .$$

Soit C une suite vérifiant la propriété (*).

1° Montrer que

$$C(0) \in \mathbb{R}_+ \quad , \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad C(n) = \overline{C(-n)} \quad \text{et} \quad |C(n)| \leqslant C(0).$$

2° Démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall r \in]0,1[\quad \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C(n)\, r^{|n|}\, e_n(x) \right] \in \mathbb{R}_+$$

(on pourra appliquer (*) avec $\xi_p = r^p e_p(x)$).

II

On désigne par E'_+ l'ensemble des formes linéaires L sur E vérifiant

$$\forall f \in E \quad (f \geqslant 0) \Rightarrow (L(f) \in \mathbb{R}_+),$$

et par E' l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur E muni de la norme :

$$|||L||| = \sup \{ |L(f)| \ ; \ f \in E \text{ et } \|f\| \leqslant 1 \}.$$

1° Montrer que E'_+ est inclus dans E'.

2° Soit L un élément de E'_+. Montrer que la suite $\hat{L}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad \hat{L}(n) = L(e_n)$$

vérifie la propriété (*).

Le reste de cette partie va être consacré à la démonstration du fait que $L \longmapsto \hat{L}$ est une application bijective de E'_+ sur l'ensemble des suites vérifiant (*).

Dans toute la suite de II, C désigne une suite vérifiant la propriété (*).

3° On pose, pour r réel appartenant à $]0,1[$ et f élément de E

$$\Phi_r(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C(n)\, r^{|n|}\, \hat{f}(n).$$

Montrer que Φ_r appartient à E'_+ et que

$$|||\Phi_r||| = C(0).$$

4° Montrer que

$$\forall f \in E \quad \forall s \in]0,1[\quad \forall t \in]0,1[\quad \Phi_s(P_t f) = \Phi_t(P_s f).$$

5° Déduire de ce qui précède que

$$\forall f \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta_1 > 0, \eta_1 < 1 \ : \ \forall s \in]0,1[\quad \forall t \in]0,1[$$
$$s \geqslant \eta \quad \text{et} \quad t \geqslant \eta_1 \quad \Rightarrow \quad |\Phi_s(f) - \Phi_t(f)| \leqslant \varepsilon.$$

6° Montrer que, pour tout f de E,

$$\lim_{\substack{r \to 1 \\ r<1}} \Phi_r(f) \quad \text{existe},$$

et que, si on note $\Phi(f)$ cette limite, Φ appartient à E'_+ et

$$(**) \qquad \hat{\Phi} = C.$$

7° Montrer que Φ est l'unique élément de E'_+ vérifiant (**).

.../...

X28X

III

On désigne par H l'ensemble des fonctions h définies sur

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ |x|^2 + |y|^2 < 1\}$$

et à valeurs dans $\mathbb{C}$, de dérivées partielles premières et secondes définies et continues sur D, et vérifiant

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} h + \frac{\partial^2}{\partial y^2} h = 0$$

sur D. On note H_+ l'ensemble des éléments h de H tels que

$$\forall (x, y) \in D \qquad h(x, y) \in \mathbb{R}_+ .$$

Si h appartient à H, on note $\tilde{h}$ la fonction

$$\tilde{h}(r, \theta) = h(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

définie pour r appartenant à $]0, 1[$ et θ appartenant à $\mathbb{R}$.

On admettra que, si h et k appartiennent à H,

$$\forall r \in]0, 1[\quad \int_{-\pi}^{\pi} \left[\left(\frac{\partial}{\partial r} \tilde{h}(r, \theta) \right) \tilde{k}(r, \theta) - \left(\frac{\partial}{\partial r} \tilde{k}(r, \theta) \right) \tilde{h}(r, \theta) \right] d\theta = 0.$$

1° Soit C une suite vérifiant (*). Montrer que la fonction F_C définie sur D par

$$\forall (x, y) \in D \quad F_C(x, y) = C(0) + \sum_{n=1}^{\infty} C(n)(x + iy)^n + \sum_{n=1}^{\infty} C(-n)(x - iy)^n$$

est un élément de H_+.

Le reste de cette partie va être consacré à la démonstration du fait que $C \longrightarrow F_C$ est une application bijective de l'ensemble des suites vérifiant (*) sur H_+.

Dans toute la suite de III, h désigne un élément de H_+.

2° On pose, pour $n \in \mathbb{Z}$,

$$\forall r \in]0, 1[\quad C_r(n) = \frac{1}{r^{|n|}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{h}(r, \theta) e_{-n}(\theta) \, d\theta .$$

Montrer que $\frac{d}{dr}\left(C_r(n)\right)$ existe et vaut 0 pour tout r de $]0, 1[$.

On pose $C(n)$ la valeur commune des $C_r(n)$.

3° Montrer que la suite C vérifie la propriété (*) puis que

$$\forall r \in]0, 1[\quad \forall \theta \in \mathbb{R} \quad \tilde{h}(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C(n) r^{|n|} e_n(\theta).$$

(Pour ce second point, on pourra calculer d'abord $P_s[\tilde{h}(r, .)]$ où $\tilde{h}(r, .)$ est la fonction $\theta \longmapsto \tilde{h}(r, \theta)$.)

4° En déduire que

(***) $$h = F_C$$

et que C est l'unique suite vérifiant (*) et (***).

IV

On conserve les notations définies dans les parties précédentes.

Pour r réel appartenant à $]0, 1[$ et θ appartenant à $\mathbb{R}$, on note $A_r(\theta + \cdot)$ la fonction

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto A_r(\theta + x).$$

Montrer qu'à tout élément L de E'_+ on peut associer un élément unique h de H_+ tel que

$$\forall r \in]0, 1[\quad \forall \theta \in \mathbb{R} \qquad \tilde{h}(r, \theta) = L[A_r(\theta + \cdot)]$$

et que l'application ainsi définie est une bijection de E'_+ sur H_+.

FIN

X 29 X

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail